Yang-Baxter lygtis

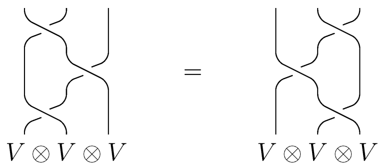
Yang-Baxter equation

Vidas Regelskis[1,2]
[1]Vilniaus universitetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Saulėtekio al. 3, LT-10257 Vilnius
[2]School of Physics, Astronomy and Mathematics, University of Hertfordshire, Hatfield, AL10 9AB, UK
vidas.regelskis@ff.vu.lt

Lygčių sprendimas yra sena kaip laikas istorija ir mūsų kasdieninio gyvenimo dalis. Vienos lygtys yra lengvai išsprendžiamos, tuo tarpu kitos reikalauja didelio išradingumo. Yang-Baxter lygtis yra trečios eilės netiesinė lygtis, veikianti tenzorinėje vektorinėje erdvėje $V \otimes V \otimes V$,

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23} \tag{1}$$

kur $R : V \otimes V \to V \otimes V$ yra tiesinis operatorius, vadinamas *R-matrica*, o žymėjimas R_{ij} reiškia, kad operatorius R veikia i-tame ir j-tame tenzoranduose. Grafiškai,



Yang-Baxter lygtis pavadinta Chen-Ning Yang'o ir Rodney Baxter'io garbei. Jie atrado šią lygtį kvantinės mechanikos [1] ir statistinės fizikos [2] kontekste. Šiuo metu Yang-Baxter lygtis užima svarbų vaidmenį daugelyje matematikos ir fizikos sričių: dagiadalelėse sistemose, sklaidos matricos teorijoje, kondensuotųjų medžiagų fizikoje, kvantinių laukų teorijoje, grupių teorijoje, mazgų teorijoje, įvaizdžių teorijoje.

Vienas paprasčiausių netrivialių Yang-Baxter lygties sprendinių yra Yang'o R-matrica,

$$R(u) = \mathrm{id} - uP \tag{2}$$

kur id yra vienetinis operatorius, o P yra perstatymo operatorius,

$$P : a \otimes b \mapsto b \otimes a \tag{3}$$

visiems $a, b \in V$. Šį sprendinį fizikos kontekste galima interpretuoti kaip dalinę dviejų tapatingų dalelių sklaidos matricą, kur u yra dalelių judesio kiekio momentų skirtumas. Tai nėra pilna sklaidos matrica, nes trūksta skaliarinio daugiklio, kuris dažnu atveju yra meromorfinė funkcija nustatoma iš unitarumo ir krūvio-jungtinumo sąlygų.

Surasti visus Yang-Baxter lygties sprendinius, kai V yra bet kokia vektorinė erdvė, yra nepasiekiama užduotis. Šią užduotį galima stipriai supaprastinti pareikalavus, kad V būtų neredukuojamas paprastos Lie algebros $\mathfrak{g}$ įvaizdis. Pastaruoju atveju Yang-Baxter lygties sprendiniai yra $\mathfrak{g}$-ekvivariantiniai tiesiniai atvaizdavimai. Jų klasifikacija visoms paprastoms Lie algebroms buvo surasta Alexander Belavin'o ir Vladimir Drinfeld'o [3]. Jie parodė, kad kiekvienai paprastai Lie algebrai $\mathfrak{g}$ egzistuoja trijų tipų sprendiniai: racionalūs, trigonometriniai ir eliptiniai (tik kai $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$), ir nurodė jų nulių ir polių struktūrą.

Svarbu tai, kad kiekvienas Lie tipo sprendinys natūraliu būdu apibrėžia begalinę asociatyvią nekomutatyvią algebrą, vadinamą kvantine grupę. Geriausiai suprastos ir plačiausiai išnagrinėtos yra racionalaus tipo kvantinės grupės, žinomos Yangian algebrų vardu [4]. Fizikoje, šios algebros naudojamos aprašyti procesus sukinių grandinėlese, pavyzdžiui vienmačiuose feromagnetuose, fazinius virsmus kristalinėse medžiagose, pavyzdžiui ledo kristaluose, netiesinių sigma modelių dinamiką, o taip pat yra kertinės algebrinės struktūros Costello-Witten-Yamazaki kalibruotinių laukų teorijoje.

Skirtingai nuo paprastų Lie algebrų, Yangian algebrų baigtinių įvaizdžių kategorija $Y(\mathfrak{g})\mathrm{-rep}^{\mathrm{f.d.}}$ nėra pusiau-paprasta. Kai $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, egzistuoja surjektyvus homomorfizmas iš Yangian algebros $Y(\mathfrak{sl}_n)$ į universalų $\mathfrak{sl}_n$ gaubtą $U(\mathfrak{sl}_n)$, leidžiantis kiekvieną $\mathfrak{sl}_n$-modulį laikyti $Y(\mathfrak{sl}_n)$-moduliu. Ši savybė yra išskirtinė Lie algebrai $\mathfrak{sl}_n$ ir stipriai palengvina kategorijos $Y(\mathfrak{sl}_n)\mathrm{-rep}^{\mathrm{f.d.}}$ analizę. Visgi, net šiuo atveju, yra likę daug neatsakytų klausimų susijusių su šia kategorija.

Šiame paranešime supažindinsiu su Yang-Baxter lygties sprendiniais, apibrėžiančiais Yangian tipo algebras, skirtingomis jų realizacijomis, ir atvirais klausimas, susijusiais su $Y(\mathfrak{g})\mathrm{-rep}^{\mathrm{f.d.}}$ kategorija.

Reikšminiai žodžiai: Yang-Baxter lygtis, Yangian algebros, įvaizdžių teorija.

Literatūra

[1] C. N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction.* Phys. Rev. Lett., 19 (23): 1312–1315, 1967.

[2] R. J. Baxter, *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Physics, 70 (1): 193–228, 1972.

[3] A. A. Belavin and V. G. Drinfeld, *Solutions of the Classical Yang–Baxter Equation for Simple Lie Algebras*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., 16 (3): 1–29, 1982; Funct. Anal. Appl., 16 (3):159–180, 1982.

[4] A. Molev, *Yangians and Classical Lie Algebras*, Amer. Math. Soc., Providence, 2007.