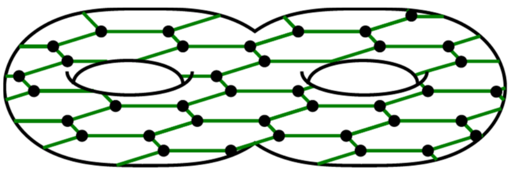
# Kondensacija dvimatėse topologinėse materijos fazėse

# Condensation in two-dimensional topological phases of matter

Vincentas Mulevičius[1]
[1]Vilniaus universitetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Saulėtekio al. 9, 10222 Vilnius
vincentas.mulevicius@ff.vu.lt

Topologinės materijos fazės sudaro tam tikrą kvantinių sistemų klasę. Jas atpažinti galima per keletą būdingų egzotiškų reiškinių. Vienas jų yra išsigimęs (t.y. ne vienmatis) vakuumo būsenų poerdvis, priklausantis nuo fizinės sistemos erdvės (pvz. gardelės) topologijos, bet nepriklausantis nuo jos dydžio. Ši savybė sieja topologines materijos fazes su stebėtinai plačiu kitų fizikos sričių diapazonu, pvz. jų efektiniai žemos energijos artiniai yra vadinamosios topologinės kvantinio lauko teorijos. Pastarosios sutinkamos kvantinės gravitacijos modeliuose, stygų teorijoje, nagrinėjant instantonines pseudo-daleles, o taip pat moderniose matematikos srityse, kaip mazgų teorija, kategorijų teorija ir t.t. Dvimatės topologinės materijos fazės (t.y. apibrėžtos per gardeles/lauko teorijas ant plokštumos, sferos, toro ir t.t.) turi turtingą sužadinimų teoriją - anyonines daleles. Anyonai yra dalelės, kurių statistika skiriasi nuo bozonų ir fermionų, jos gali būti panaudotos pvz. konstruojant kvantinius kompiuterius ir kvantinės informacijos lustus.

Konkretūs modeliai, realizuojantys dvimates topologines fazes, buvo pasiūlyti Kitaev [1] ir Levin–Wen [2]. Juos apibrėžiant pasirenkamas paviršius $\Sigma$ ir gardelės formos poaibis $\Gamma \subseteq \Sigma$.



1 pav. Gardelė $\Gamma$ ant paviršiaus $\Sigma$. Kiekviena plaketė turi būti homeomorfiška diskui.

Gardelės viršūnėms priskiriama lokalių laisvės laipsnių Hilberto erdvė $X$, sistemos Hamiltonianas turi pavidalą

$$H = \sum_v (1 - P_v) + \sum_e (1 - P_e) + \sum_f (1 - P_f)\,, \quad (1)$$

kur indeksai $v, e, f$ žymi gardelės viršūnes, briaunas ir plaketes. Operatoriai $P_v : X \to X$, $P_e : X^{\otimes 2} \to X^{\otimes 2}$ ir $P_f : X^{\otimes n} \to X^{\otimes n}$ veikia tik ant laisvės laipsnių, gretimų atitinkamam komponentui $c$ (viršūnei, briaunai, plaketei), ir sudaro komutuojančių projektorių šeimą, t.y.

$$[\, P_c\,,\, P_{\tilde{c}}\,] = 0 \quad , \quad P_c P_c = P_c\ . \qquad (2)$$

Tokiu būdu vakuumo būsenų erdvė yra bendras prjektorių vaizdas $\mathrm{im} \prod P_c$, o sužadintos būsenos gaunamos komponuojant tik dalį operatorių, pvz. $\mathrm{im} \prod_{c \neq \tilde{c}} P_c$.

Atskiri modelių (1) pavyzdžiai gaunami pasirinkus tam tikrą algebrinę struktūrą: Kitaevo modeliams reikalinga baigtinė grupė $G$, Levin–Wen modeliams – pusiau-paprasta sferinė tenzorinė kategorija $\mathcal{S}$. Nuo jos priklauso tiek operatorių $P_c$ išraiškos, tiek sistemos anyoninių sužadinimų tipai. Paprasčiausas pavyzdys yra Kitaevo modelis gaunamas iš grupės $\mathbb{Z}_2 \cong \{\pm 1\}$, dar vadinamas toriniu kodu. Jo anyonai aprašomi paprastosiomis šios grupės kvantinio dublio (t.y. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) reprezentacijomis, kurių yra keturios: $1 \times 1$ (trivialioji $\times$ trivialioji), $1 \times s$ (triviali $\times$ ženklas $\pm 1$), $s \times 1$ ir $s \times s$. Tokiu būdu torinis kodas turi 3 netrivialius anyonus. Algebrinė struktūra taip pat nusako efektinę topologinę kvantinio lauko teoriją: Kitaevo modeliams gaunamos Dijkgraaf–Witten tipo teorijos, Levin–Wen modeliams – Turaev–Viro–Barrett–Westbury tipo teorijos.

Straipsnio manuskripte [3] su kolegomis Ingo Runkel ir Thomas Voß (Hamburgo universitetas, Vokietija) nagrinėjame panašaus tipo modelius, kurie konstruojami kitų topologinių materijos fazių „viduje“. Tai reiškia, kad lokalieji laisvės laispniai $X$ patys yra anyoninės dalelės jau realizuotoje fazėje $\mathcal{A}$. Tokiai anyoninei gardelei pritaikomas Hamiltonianas, turintis analogišką (1) formą. Manuskripte pademonstruojame, kad šių sistemų vakuumo būsenos sudaro naują topologinę fazę $\mathcal{B}$. Tokiu būdu fazė $\mathcal{A}$ „kondensuojama“ į fazę $\mathcal{B}$. Įdomu tai, kad fazė $\mathcal{B}$ gali turėti daug turtingesnę anyonų šeimą, nei fazė $\mathcal{A}$, pvz. ankstesniame darbe [4] nagrinėjome pavyzdį, kuris šiame kontekste rodo, kad Ising fazė, turinti 2 netrivialius anyonus, gali būti sukondensuota į Wess–Zumino–Witten fazę „$sl_2$ lygyje 10“, turinčią 10 netrivialių anyonų.

Kaip ir anksčiau minėti topologinių fazių modeliai, mūsų modeliui apibrėžti reikalinga algebrinė struktūra. Šiuo atveju ji vadinama *orbifold datum* ir yra susijusi su defektais lauko teorijose ir vadinamosiomis neinvertuojamomis lauko teorijų simetrijomis. Matematinis šių konstrukcijų formalizmas nagrinėjamas [5] ir potencialiai gali būti pritaikytas panašiems bet kokios dimensijos topologinių materijos fazių kondensacijos procesams aprašyti.

*Reikšminiai žodžiai:topologinės materijos fazės, lauko teorijos, anyonai, defektai, matematinė fizika*

## Literatūra

[1] A. Kitaev, *Fault-tolerant quantum computation by anyons,* Ann. Phys. **303**:1 (2003) 2–30, arXiv:quant-ph/9707021 .

[2] M.A. Levin, X.G. Wen, *String net condensation: A Physical mechanism for topological phases,* Phys. Rev. B **71** (2005) 045110, arXiv:cond-mat/0404617 [cond-mat.str-el] .

[3] V. Mulevičius, I. Runkel, T. Voß, *Internal Levin–Wen models*, arXiv:2309.05755 [cond-mat.str-el] .

[4] V. Mulevičius, I. Runkel, *Fibonacci-type orbifold data in Ising modular categories*, J. Pure Appl. Algebra **227**:6 (2023) 107301, arXiv:2010.00932 [math.QA] .

[5] N. Carqueville, I. Runkel, G. Schaumann, *Orbifolds of n-dimensional defect TQFTs*, Geom. Topol. **23** (2019) 781–864, arXiv.1705.06085 [math.QA] .