

Anomalioji difuzija ir ilga atmintis rinkėjo modelyje

Anomalous diffusion and long-range memory in the voter model

Rytis Kazakevičius, Aleksėjus Kononovičius

Vilniaus universitetas, Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Saulėtekio al. 3, 10257 Vilnius
rytis.kazakevicius@tfai.vu.lt

Rinkėjo modelis yra vienas iš labiausiai ištirtų agentais pagrįstų modelių sociofizikoje [1]. Nors pradinis rinkėjo (Kirmano) modelis buvo skirtas aprašyti konkurenciją tarp rūšių, šis paprastas imitacinis modelis buvo pritaikytas ir nuomonių dinamikai tirti [2]. Todėl savo tyrime aprašėme netiesines rinkėjo modelio transformacijas [3]. Tiek kintamojo aprašančio agentų (rinkėjų) skaičių vienoje būsenoje (turinčių vieną iš dviejų galimų nuomonių), tiek laiko skalės transformacijos veda į procesą, kuris gali atkurti įvairius ilgos atminties statistinius įverčius, tokius kaip anomalioji difuzija (subdifuzija ir superdifuzija) ir laipsninis galios spektrinis tankis.

Darant prielaidą, kad yra dvi galimos būsenos ir agentų skaičius N yra fiksuotas, modeliui apibūdinti galima užrašyti tokios perėjimo spartas:

$$\begin{aligned}\pi^+ &= \pi(X \rightarrow X+1) = (N-X)(r_1 + hX), \\ \pi^- &= \pi(X \rightarrow X-1) = X(r_2 + h(N-X)).\end{aligned}\quad (1)$$

X yra agentų skaičius pirmoje būsenoje, r_i yra nepriklausomo (vienos dalelės sąveikos) perėjimo sparta, o h yra parametras įvertinantis bandos jausmą (dviejų dalelių sąveikos įvertis).

Termodinaminėje riboje $N \rightarrow \infty$, o $x = X/N$ gauname tokia stochastinė diferencialinė lygtį (SDL)

$$\begin{aligned}dx &= \frac{\pi^+ - \pi^-}{N} dt + \sqrt{\frac{\pi^+ - \pi^-}{N^2}} dW_t \approx \\ &\approx h[\varepsilon_1(1-x) + \varepsilon_2 x] dt + \sqrt{x(1-x)} dW_t.\end{aligned}\quad (2)$$

Čia $\varepsilon_i = r_i/h$ yra santykinis perėjimo sparta, o W_t yra standartinis Wiener procesas.

Yra žinoma, kad kai kurie prekyautojai slepia savo ketinimus nuo kitų prekybininkų. Čia mes apsvarstysime netiesinę x transformaciją, kuri galėtų šį efektą įvertinti

$$y = \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha, \quad (3)$$

jei $\alpha > 1$, tai daroma prielaida, kad prekyautojai slepia savo ketinimus, kai rinka išeina iš pusiausvyros (auga perteklinė paklausa).

$\alpha > 1$, prekybininkai slepia savo ketinimus, kai rinka artėja prie pusiausvyros (perteklinė paklausa tampa nuliu)

Atlikus kintamojo transformaciją aprašytą (3) formule (2) SDL gauname naują SDL

$$dy = \left[\left(\eta_+ - \frac{\lambda_+}{2} \right) y^{2\eta_+-1} + \left(\eta_- - \frac{\lambda_-}{2} \right) y^{2\eta_--1} \right] dt + (y^{\eta_+} + y^{\eta_-}) dW_t. \quad (4)$$

Naujai įvesti parametrai yra:

$$\eta = 1 + \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda_+ = 1 - \alpha\varepsilon_1, \quad \lambda_- = 1 + \alpha\varepsilon_2. \quad (5)$$

Jei $\alpha > 0$ ir $y < 1$, aukščiau pateikta SDL galima aproksimuoti heterogeninės difuzijos procesu (HDP) išoriniame potenciale [4]

$$dy = \left(\eta - \frac{\lambda}{2} \right) y^{2\eta-1} dt + y^\eta dW_t. \quad (6)$$

Su atspindinčia kraštine sąlyga (6) SDL, pasižymi tokiais ilgos atminties savybėmis [5] kaip laipsninis skirstinys $P(x) \sim 1/x^\lambda$, anomalioji difuzija

$$\langle y^2(t) \rangle - \langle y(t) \rangle^2 \sim t^\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{1-\eta} = \frac{1}{\alpha}. \quad (6)$$

ir laipsninis galios spektrinis tankis

$$S(f) = \frac{1}{f^\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\lambda-3}{2(\eta-1)}. \quad (3)$$

Mes išvedėme analitines aproksimacijas aprašančias rinkėjo modelio momentų kitimą laikui bėgant. Pasinaudojant šiomis aproksimacijomis galima nesunku apskaičiuoti vidurkio, dispersijos ir kitų aukštesnių momentų laikinę raidą. Skaitmeninio modeliavimo rezultatai, suskaičiuoti pasinaudojant Gillespie metodu, sutampa su išvestomis analitinėmis išraiškomis. Mūsų išvedimai buvo pagrįsti rinkėjo modelio nuo laiko priklausomos tikimybės tankio funkcijos aproksimavimu heterogeninės difuzijos proceso tikimybės tankio funkcija. Pasiūlytą tikimybės tankio formulę būtų galima panaudoti norint gauti pirmojo praėjimo (kirtimo) laikų pasiskirstymą.

Reikšminiai žodžiai: rinkėjo modelis, ilga atmintis, anomalioji difuzija.

Literatūra

- [1] C. Castellano, S. Fortunato and V. Loreto, Rev. Mod. Phys., **81**, 591 (2009).
- [2] T. Liggett, Stochastic interacting systems: contact, voter, and exclusion processes (Springer, Berlin, 1999).
- [3] R. Kazakevičius, A. Kononovičius, Phys. Rev. E, **103**, 032151 (2021).
- [4] R. Kazakevičius, A. Kononovičius, Phys. Rev. E, **94**, 032109 (2016).
- [5] R. Kazakevičius, A. Kononovicus, B. Kaulakys, V. Gontis, Entropy **23** (2021).